

せると Quiz

presented by

大海 忍

東京大学医科学研究所

<http://www.ims.u-tokyo.ac.jp/ohmiken/index.htm>



問題

自然数 n に対して、以下の式の値が自然数になるのは n がどのような数のときでしょうか。
「…」は、限りなく続くという意味です。

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{n+n+n+n+n+n+n+\dots+n}}}}}}}$$

ヒント!

生物現象のモデルとかいうことではなく、純粋に数学の問題です。が、普段の実験と同様で、頭だけで考えずに手を動かしてみると意外とすんなり解けます。まず、 $n=1$ のときどうでしょう。では、 $n=2$ 。答の一部がわかったと思いますが、何か見えてきましたか？ つぎはこの式、 $\sqrt{\quad}$ がたくさん重なっていやな感じですね。これを整理してみましょう。

• 答え •

アクセスはコチラまで!



<http://gakken-mesh.jp/journal/saibo/>

※『細胞工学』各月号ページの「関連リンク」欄から解答のPDFをご覧になれます。

せると Quiz 第7回

• 答え •

$$n=k(k+1) \quad (k \text{ は自然数})$$

解説

$\sqrt{\quad}$ の計算ができる電卓があったら用意してください。ヒントにしたがって、まず $n=1$ を代入すると、1.6180339……。すっきりした数ではないけれど一定値に近づいています。では、 $n=2$ 。今度は2になりますね。どんどんいきましょう。 n がいくつで見当がつかましたか。 $n=2, 6, 12, 20, 30, \dots$ で式の値が2, 3, 4, 5, 6, ……となりますね。すなわち、 k を自然数として $n=k(k+1)$ が求める答えです。

代入法でわかってしまいましたが、もう少し数学らしく解いてよ、というかたのために。まず、式の規則性にちょっと注目。 $\sqrt{n+n}=f_1$ のように置いてみると中から i 番目の $\sqrt{\quad}$ は $\sqrt{f_{i-1}+n}=f_i$ となります。ここで、 i が大きくなったとき f_i は一定の値に近づくのでこれを f とすれば、

$\sqrt{f+n}=f$ が成り立ちます。移項して両辺を二乗すれば、これは f に関する二次方程式です。むかし習った解の式、 $x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を思い出してください。二次方程式を解くと $f=\frac{2n+1+\sqrt{(2n+1)^2-4n^2}}{2}$ となります。 $f > n$ なので、 $\sqrt{f}=\sqrt{n+\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}}$ が整理した式となります。ためしに $n=1, 2, \dots$ と代入してみてください。OK ですね。

これが自然数になるということは、右辺の $\sqrt{\quad}$ の中が N^2 (N は自然数) と置けます。移項して $\sqrt{\quad}$ を外すつもりで両辺を二乗し式を整理すると、これは n についての二次方程式です。

$$n^2-2Nn+N^4-N^2=0$$

解は $n=N(N \pm 1)$ です。1つ違いの自然数の積ということです。非常に簡単に解けましたね。数式にも自信を持ってください。

付け足しです。2011年10月、数学や物理が得意だと大学卒業後の稼ぎが多いという調査結果を、同志社大や京都大のグループが発表したというニュースが報じられました。けしからんことに、生物が得意だと理系では最低と書いてありました。どういう調査をしてどんな分析をしたのか追究する気も起こりませんが、ナンセンスな報道ですね。これが、「成績が良かった人は就職後の所得が高くなる」だったら、だれでも納得、おもしろい記事にはなりません。事実を取り上げる際のメディアによるトリックの部分もあるかと思えます。