数値シミュレーションによる Windkessel model を用いた動脈系の力学特性と血流特性に関する基礎研究

藍野大学医療保健学部臨床工学科　　殿所飛翔

要旨

ヒト動脈血流の血行動態を簡略化した 2 要素 Windkessel model に，上流側の流路抵抗および末梢側の慣性力を表す要素を加え，動脈圧変化におよぼす影響を数値シミュレーションによって検討した．その結果，本研究で用いた数値計算法で精度よく解を求めることができ，上流側の抵抗付加により血圧の平均値が上昇する傾向が見られ，血流の慣性力を考慮したモデルでは，収縮期の血圧変化を緩やかにするような影響が見られた．

1. 研究の目的

血液循環は生命維持および人体の機能を維持するために必要不可欠である．中でも動脈血流は全身の各組織に酸素や栄養の供給を行う最も重要な要素である．また，循環器領域や血液浄化領域における診断や治療においても，生体機能代行装置と血液循環系の力学的相互作用の理解は重要であるといえる．Windkessl Model は血液循環系における動脈血流の血行動態（血圧変化）を表す力学モデルであり，最も基本的なモデルは図 1 に示すように太い動脈部の弾性的性質（コンプライアンス）と末梢血管部の流れ抵抗の 2 つの要素で構成される集中定数モデルである．さらに基本の 2 要素モデルに大動脈弁の抵抗や血流の慣性力の影響を加えたモデルなども提案されている [1)]．本研究ではこれらのモデルが動脈内の血圧変化におよぼす影響を検討するため，それらのモデルを表す支配方程式を導出し，模擬心拍出流量波形を与え，数値シミュレーションによって各モデルの動脈圧波形におよぼすモデル要素の影響を検討した．**（図 1）**

2. 研究方法

動脈の弾性特性および末梢血管抵抗の 2 つの力学的要素で表される基本の Windkessel model をそれと等価な電気回路モデルとして図 2 に示す．このモデルにおいて，キャパシタの静電容量 C が動脈の弾性特性を表すコンプライアンス C に対応し，電気抵抗 R が末梢血管抵抗 R に対応する．また，回路に流れる電流は心拍出流量 Q に対応する．また，図中の $p(t)$ が Windkessel model で得られる動脈圧を示している．このモデルの支配方程式は式（1）に示される微分方程式となる．この方程式に Q を与えることにより，動脈圧 p の時間変化を得ることができる．**（図 2, 図 3, 図 4）**

図 3 は図 2 の 2 要素モデルに大動脈弁の抵抗を模擬して，モデル上流にその抵抗 r を加えたモデル（3 要素モデル）である．このモデルでは，式（2）によって表される左心室流出直後（大動脈起始部）の圧力 p_{LV} を求め，式（3）より動脈圧 p を求めることができる．また，図 4 は末梢部における血流変化による血流慣性力を考慮するため，末梢部にインダクタ L を加えたモデル（4 要素モデル）である．このモデルの支配方程式は式（4）となり，左心室流出量 Q およびその時間微分量を与えると，動脈圧 p を求めることができる．

最初に数値シミュレーションの妥当性を検討するため，式（1）で表される 2 要素モデルの解析解を求めた．表 1 に示した標準的な心サイクルから求めた 1 心拍当たりの拍出流量 CO，心拍数 HR，心収縮期および拡張期時間を用いて，式（5）および図 5 に示す解析解を得ることのできる模擬心拍出波形を作成した．この波形を用いて解析解を導出し，動脈圧が 120 mmHg から 80 mmHg の間で変化するように動脈コ

ンプライアンス C および末梢血管抵抗 R の値を表 1 に示すように，C = 1.280 mL/mmHg，R = 1.215 mmHg/(mL/s)と決定した．これらの値より得られた 2 要素モデルの時定数は，$T = CR = 1.555$ s となり，心周期の約 1.8 倍の値となった．以降の数値シミュレーションでは C および R にはこれらの値を用いた．

また，数値計算法には，常微分方程式の初期値問題に対して高精度で解を得ることのできる Runge-Kutta-Fehlberg 法を用い，計算ツールには MATLAB 互換の GNU Octave（ver. 4.4.1）を用いた．**（表 1, 図 5）**

3. 結果の概要および考察

2 要素，3 要素および 4 要素の各モデルに対して，図 5 のモデル心拍出波形を用いて得られた数値シミュレーション結果を図 6 に示す．図中の 2 要素モデルの As は解析解，Ns は数値解を示している．図からわかるように 2 要素モデルの数値解は，解析解と非常によく一致しており，今回の数値シミュレーションの妥当性を確認することができた．**（図 6）**

3 要素モデルおよび 4 要素モデルに用いた大動脈弁抵抗 r および血流慣性力 L の値については，今回の研究では適切な値を設定する要因を得られなかったため，それらの値を変化させ数値シミュレーションを行った．その結果，r は末梢血管抵抗 R の 5%以上の値にすると非生理的な血圧波形となり，L においては，数 mmHg/(mL/s^2)程度でなければ生理的な血圧波形を得られなかった．そのため，今回のシミュレーションでは，r は R の 1% ，L は 1 mmHg /(mL/s^2)として数値計算を行った．

3 要素モデルに対する数値シミュレーション結果は 2 要素モデルと比較すると，わずかではあるが，波形の全周期にわたって圧力値の上昇がみられた．これは，数値計算により得られた大動脈起始部の圧力に相当する p_{LV} の上昇が抵抗 r の管路による圧力損失を上回るために生じたと考えられる．また，r の値を大きくすると，波形の全周期にわたって圧力の上昇が生じることが確認され，大動脈弁部の抵抗を付加することは動脈血圧を上昇させる要因になると考えられた．しかし，大動脈弁による抵抗の大きさは，末梢血管抵抗 R の 1%の一定値を仮定したため，抵抗値の変化やその値についてさらに検討する必要があるが，大動脈弁狭窄症などの弁抵抗が増加した状態の模擬も可能と思われ，そのような状態の血圧変動を理解する基本的モデルの応答が得られたと考えられる．

次に 4 要素モデルで得られた血圧波形を見ると，3 要素モデルの場合と異なり，最高，最低血圧は 2 要素モデルの場合と大きく変化していない．しかし，収縮期における血圧の変化は 2 要素モデルに比べわずかに緩やかになり，血流の慣性力が圧力の変化を緩和している可能性が示唆された．また，図には示していないが，L の値を大きくした計算結果からは圧力緩和が大きくなる傾向が見られた．本研究では，心拍出流量 Q を入力量としているため，拡張期における Q は 0 となり，数値計算上は拡張期では末梢血流の慣性力の影響を受けないこととなる．そのため，拡張期では 2 要素および 3 要素と同様の波形になり，収縮期の血圧波形にのみその影響が表れたと考えられる．今回用いた 4 要素モデルでは血流の慣性力は末梢部にのみ作用することとなり，より上流の動脈部で生じる血流の慣性力は含まれていない．これらのことより，4 要素モデルについては，その要素の配置や慣性力の大きさも含めて，血液循環系の特性をより実現象に近いモデルを検討する必要があると考えられた．

4. 結論

ヒトの動脈血流の血行動態を簡略化して表現される 2 要素 Windkessel model に，いくつかの要素を加えて，動脈圧変化におよぼす影響を数値シミュレーションによって検討した．基本の 2 要素モデルに上流

側の流路抵抗および末梢側の慣性力を表す要素を加え，動脈圧波形におよぼす影響を調べた．その結果，本研究で用いた数値計算法で Windkessel model の支配方程式を精度よく解を求められることが確認され，上流側の抵抗付加により，血圧波形に大きな変化は表れなかったが，血圧の平均値が上昇する傾向が見られた．また，血流の慣性力を考慮したモデルでは，血圧の変化を緩やかにするような影響が見られた．

［図と表］

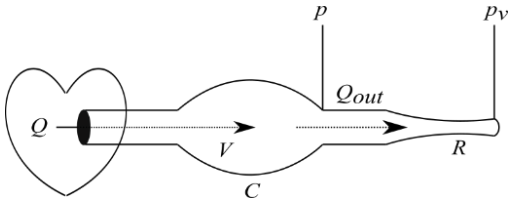

図 1　動脈系の Windkessel model

表 1　心拍動および血管特性

Cardiac output: *CO* [ml/beat]	70
Heartrate: *HR* [bpm]	70
Heart cycle [s]	0.857
Systolic diastolic time ratio	1:2
Systolic cycle [s]	0.286
Diastolic cycle [s]	0.571
Average cardiac output [mL/s]	81.67
Maximum cardiac output: Q_{max} [mL/s]	490
Arterial compliance: *C* [ml/mmHg]	1.280
Peripheral resistance: *R* [mmHg/(mL/s)]	1.215
Aortic valve resistance: *r* [mmHg/(mL/s)]	1% of *R*
Blood flow inertance: *L* [mmHg/(mL/s^2)]	1.0

$$\frac{dp}{dt}+\frac{p}{CR}=\frac{Q}{C} \qquad (1)$$

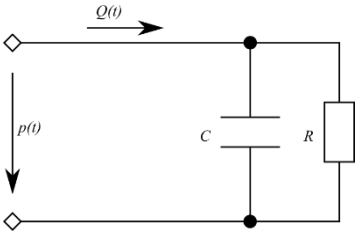

図 2　2 要素等価電気回路モデル

$$\frac{dp_{LV}}{dt}+\frac{p_{LV}}{CR}=r\frac{dQ}{dt}+\left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{Q}{C} \qquad (2)$$

$$p=p_{LV}-rQ \qquad (3)$$

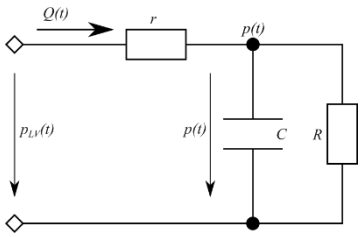

図 3　3 要素等価電気回路モデル

注：図 2～図 5 は，図の上の式も含めて 1 つの図とします．

$$\frac{dp}{dt}+\frac{p}{CR}=\frac{Q}{C}+\frac{L}{CR}\frac{dQ}{dt}+L\frac{d^2Q}{dt^2} \qquad (4)$$

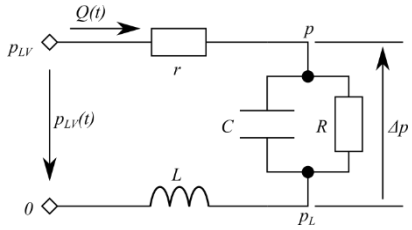

図 4　4 要素等価電気回路モデル

$$\left.\begin{aligned} Q(t)&=\frac{Q_{max}}{2}(1-\cos\omega t) && :\text{Systolic}\\ Q(t)&=0 && :\text{Diastolic}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

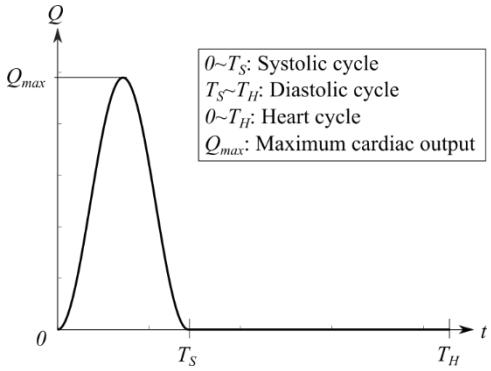

図 5　模擬心拍出流量波形

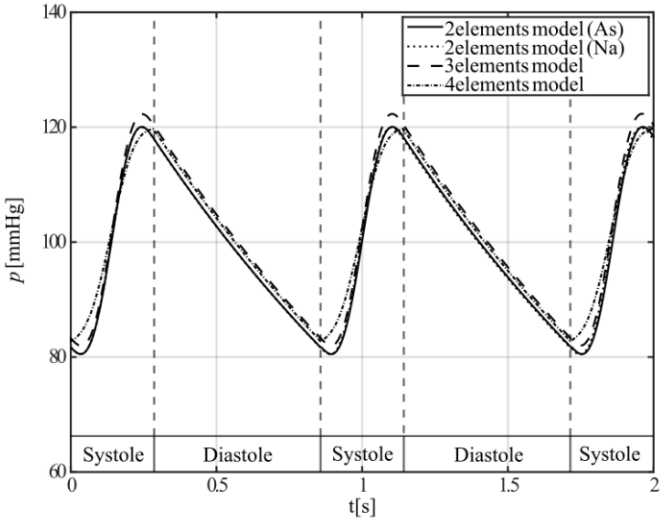

図 6　各モデルにおける動脈圧波形の比較

＜参考文献＞

1) Nico Westerhof, Jan-Willem, Lankhaar Berend E. Westerhof: "The arterial Windkessel", Medical & Biological Engineering & Computing, Volume 47, Issue 2, pp 131–141, 2009.

［指導教員名，所属］
桜井篤，　藍野大学医療保健学部臨床工学科